Ensayos

Ecuación de transmisión de calor

Resumen

En este trabajo de investigación se estudia el problema de valor inicial con valor en la frontera para la ecuación de transmisión de calor en la semirrecta para x>0:

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & x>0, t>0 \\ u(x,0)=u_0(x) & x>0 \\ u(0,t)=0, & t>0 \end{cases} \quad (1)$$

Se demuestra que sí el dato inicial $u_0 \in L^2$, entonces existe una única solución $u \in C\left(\left[0,\infty\right);L^2\right)$ del problema de valor inicial con frontera (1). Donde C es el espacio de funciones continuas para $t \in \left[0,\infty\right)$ y L^2 es el espacio de Lebesgue con la siguiente definición, $u(x) \in L^2$ si $\left(\int_0^\infty |u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$ existe. También se obtiene una solución fundamental del problema (1) usando la transformada de fourier para obtener una ecuación en términos de la función de Green que tiene la siguiente forma:

$$u(x,t)=\int_0^\infty G(x-y,t)u_0(y)dy,$$

donde

$$G(x-y,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\left(e^{-\frac{(x-y)^2}{4t^2}}-e^{-\frac{(x+y)^2}{4t^2}}\right)$$

Abstract

The problem studied in this research paper is the problem of initial value with value in the border for heat transmission equation in the half-line for x> 0:

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & x>0, t>0 \\ u(x,0)=u_0(x) & x>0 \\ u(0,t)=0, & t>0 \end{cases} \quad (1)$$

It is shown that if the initial data $u_0 \in L^2$, then there is an unique solution $u \in C\left(\left[0,\infty\right);L^2\right)$ of the initial problem with border (1). Where C is the space of continuous functions for $t \in \left[0,\infty\right)$ and L^2 is Lebesgue's space with the following definition: $u(x) \in L^2$ if $\left(\int_0^\infty |u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$ exists.

Also it is a fundamental solution to the problem (1) using the Fourier transform to get an equation in terms of the Green Function in the following way:

$$u(x,t)=\int_0^\infty G(x-y,t)u_0(y)dy,$$

where

$$G(x-y,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\left(e^{-\frac{(x-y)^2}{4t^2}}-e^{-\frac{(x+y)^2}{4t^2}}\right).$$

Résumé

Dans ce travail d'investigation, on étudiera le problème de la valeur initiale et de la valeur à la frontière pour l'équation de transmission de la chaleur dans la demi-droite pour x>0:

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & x>0, t>0 \\ u(x,0)=u_0(x) & x>0 \\ u(0,t)=0, & t>0 \end{cases} \quad (1)$$

On démontre que si la donnée initiale est $u_0 \in L^2$, alors il n'existe qu'une unique solution $u \in C\left(\left[0,\infty\right);L^2\right)$ au problème de valeur initiale avec frontière (1). Où « C » est l'espace de fonctions continues pour $t \in \left[0,\infty\right)$ et « L^2 » est l'espace de Lebesgue avec la définition suivante:

$u(x) \in L^2$ si $\left(\int_0^\infty |u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$ existe.

On obtient aussi une solution fondamentale du problème (1) en utilisant la transformation de Fourrier pour obtenir une équation en termes de la fonction de Green qui a la formule suivante:

$$u(x,t)=\int_0^\infty G(x-y,t)u_0(y)dy$$

où

$$G(x-y,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\left(e^{-\frac{(x-y)^2}{4t^2}}-e^{-\frac{(x+y)^2}{4t^2}}\right)$$

* Dr. Felipe Benítez Domínguez
Dr. Isahi Sánchez Suárez
M. C. José Antonio Huesca Chávez

Palabras clave: Función de Green, Integral de Poisson, Transformada de Fourier.

Introducción

La siguiente ecuación

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, x>0, t>0 \\ u(x,0)=u_0(x), x>0 \\ u(0,t)=0, t>0 \end{cases} \quad (1)$$

se origina en la teoría del flujo de calor; esto es, el calor transferido por conducción en una varilla o alambre delgado, donde la función $u(x,t)$ es la temperatura.

* Profesores Investigadores de la Universidad Tecnológica del Istmo, Campus Ixtepec.

Aun cuando debamos hacer muchas hipótesis simplificadoras, vale la pena saber cómo se origina esta ecuación.

Si se supone que una varilla circular delgada de longitud infinita tiene una sección transversal de área A y que coincide con el eje x en el intervalo $(0,\infty)$ y también se supone que:

- El flujo de calor dentro de la varilla sólo tiene la dirección x.
- La superficie lateral ó curva, de la varilla está aislada; esto es, no escapa calor de esa superficie.
- No se genera calor dentro de la varilla.
- La varilla es homogénea es decir, su masa por unidad de volumen ρ es constante.
- El calor específico γ y la conductividad térmica del material de la varilla K son constantes.

Para derivar la ecuación diferencial parcial que satisface la temperatura $u(x,t)$ se necesitan dos leyes empíricas de la conducción del calor:

i) La cantidad de calor Q en un elemento de masa m es

$$Q = \gamma \text{mu} \qquad (2)$$

Donde u es la temperatura del elemento.

ii) La tasa de flujo de calor Q_t a través de la sección transversal de la varilla es proporcional al área A de esa sección y a la derivada parcial de la temperatura con respecto a x:

$$Q_t = -KAu_x \qquad (3)$$

Puesto que el calor fluye en dirección de la temperatura decreciente se incluye el signo menos en la ecuación (3) a fin de asegurar que Q_t sea positivo para $u_x < 0$ (flujo de calor hacia la derecha) y negativo para $u_x > 0$ (flujo de calor hacia la izquierda). Si el corte circular de la varilla entre x y $x+\Delta_x$ es muy delgado, cabe suponer que $u(x,t)$ es la temperatura aproximada en todo punto del intervalo.

Ahora bien, la masa del corte es $m = \rho A \Delta x$, de manera que, según la ecuación (2), la cantidad de calor en él es,

$$Q = \gamma p \ A\Delta\, xu \qquad (4)$$

Además, cuando el calor fluye hacia la dirección de las x positivas, se puede observar que, de acuerdo con la ecuación (3), ese calor se acumula en el corte con la razón neta

$$-KAu_x(x,t) - [-KAu_x(x+\Delta x,t)] = KA \ [u_x(x+\Delta x,t) = u_x(x,t)] \qquad (5)$$

Al diferenciar la ecuación (4) con respecto a t puede verse que esa razón neta también está expresada por

$$Q = \gamma p A \Delta \ xu_t \qquad (6)$$

Si se igualan (5) y (6), resulta

$$\frac{K}{\gamma p} \frac{u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)}{\Delta x} = u_t$$

Se toma el límite de esta ecuación cuando $\Delta x \to 0$, y se llega a la ecuación (1) en la forma

$$\frac{K}{\gamma p} u_{xx} = u_t$$

Se acostumbra que $k = K/\gamma p$ y llamar difusividad térmica a esta constante positiva. Para simplificación de los cálculos se considera el valor de $k = 1$.

Solución del problema mediante la transformada de Fourier

Para resolver el problema de calor en una varilla delgada de longitud semi-infinita con una temperatura inicial $u_o(x)$, uno de sus extremos se mantiene a la temperatura cero en todo momento para $t > 0$. Es necesario primero resolver el problema para una varilla de longitud infinita, es decir para todo $x \in \Re$. Por lo que el problema para toda la recta se define como sigue

$$\begin{cases} u_t = u_x \ , \ x \in \Re, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \ x \in \Re \end{cases} \qquad (7)$$

Para resolver este problema, necesita definirse la transformada de Fourier en la siguiente forma

$$\hat{u}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi x}u(x)dx$$

y la transformada inversa de Fourier como

$$u(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\varepsilon x}\hat{u}(\xi)d\xi$$

Se puede obtener de manera sencilla las derivadas de la función *u(x)* aplicando la definición de la transformada de Fourier, ya que cada derivada nos proporciona una multiplicación por el término $i\xi$ de la exponencial, por lo que puede expresarse la primera y la segunda derivada como sigue:

$$u_x(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\varepsilon x}i\xi\hat{u}(\xi)d\xi,$$
$$u_{xx}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi x}(-\xi)^2\hat{u}(\xi)d\xi$$

Aplicando esta definición al problema (7) se obtiene

$$\begin{cases}\hat{u}_t=-\xi^2\hat{u}(\xi,t),\ t>0\\ \hat{u}(\xi,0)=\hat{u}_0(\xi)\end{cases}\tag{8}$$

Esta ecuación puede ser resuelta como una ecuación diferencial lineal con condición inicial $\hat{u}(\xi,0)=\hat{u}_o(\xi)$. Por lo que la solución transformada se obtiene como:

$$\hat{u}(\xi,t)=\hat{u}_0(\xi)e^{-\xi^2 t}.$$

Aplicando la transformada inversa de Fourier, se obtiene la solución del problema en forma integral, por lo tanto

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi x}\hat{u}_0(\xi)e^{-\xi^2 t}d\xi.$$

Sustituyendo la transformada de Fourier de la condición inicial

$$\hat{u}_0(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi y}u_0(y)dy,$$

se obtiene

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi x-\xi^2 t}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi y}u_0(y)dyd\xi.$$

Haciendo un cambio de orden de integración, se obtiene

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}u_0(y)dy\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi(x-y)-\xi^2 t}d\xi.$$

La última integral puede ser calculada mediante un cambio de variable en la exponencial. Para hacer este cambio, primero se necesita que la exponencial pueda ser expresada como la exponencial de una función al cuadrado, por lo tanto

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}u_0(y)dy\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t\left[(\xi-i\frac{(x-y)}{2t})^2+\frac{(x-y)^2}{4t^2}\right]}d\xi,$$

separando la variable que no depende de ξ se obtiene

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}u_0(y)dye^{-\frac{(x-y)^2}{4t^2}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t\left(\xi-i\frac{(x-y)}{2t}\right)^2}d\xi,$$

al usar el cambio de variable

$$z=\xi-i\frac{(x-y)}{2t}$$
$$dz=d\xi,$$

la ultima integral se convierte en

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}u_0(y)dye^{-\frac{(x-y)^2}{4t^2}}\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_R}e^{-tz^2}dz\tag{9}$$

donde Γ_R se muestra en la Figura 1.

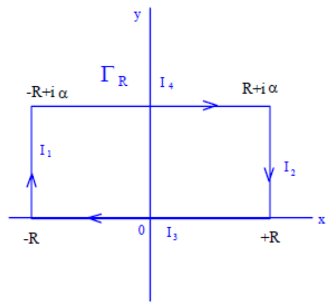

FIGURA 1. CONTORNO CERRADO Γ_R.

Aplicando el Teorema de Cauchy para un contorno cerrado para la integral interior de (9), se obtiene:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_R} e^{-tz^2}dz = \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{-R+i\alpha} e^{-tz^2}dz + \frac{1}{2\pi}\int_{R}^{R+i\alpha} e^{-tz^2}dz + \frac{1}{2\pi}\int_{R}^{-R} e^{-tz^2}dz + \frac{1}{2\pi}\int_{-R+i}^{R+i\alpha} e^{-tz^2}dz$$

$$dz + \frac{1}{2\pi}\int_{R}^{-R} e^{-tz^2}dz + \frac{1}{2\pi}\int_{-R+i\alpha}^{R+i\alpha} e^{-tz^2}dz$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$$

Estimando cada una de las integrales se obtiene

$$|I_1| = \left|\int_{-R}^{-R+i\alpha} e^{-tz^2}dz\right| \le \int_{-R}^{-R+i\alpha}\left|e^{-tz^2}\right||dz|.$$

Haciendo cambio de variable

$$z = -R + i\eta,$$
$$dz = i d\eta$$

donde $\eta \in (0,\alpha), |dz| = |d\eta|.$

Por tanto

$$|I_1| \le \int_0^{\alpha}\left|e^{-t(R+i\eta)^2}\right||d\eta|$$
$$\le \int_0^{\alpha}\left|e^{-t(R^2+i2R\eta-\eta^2)}\right|d\eta$$
$$\le e^{-tR^2+t\alpha^2}\int_0^{\alpha}d\eta$$
$$\le \alpha e^{-tR^2+t\alpha^2}$$

Considerando ahora el

$$lím_{R\to\infty}|I_1| = lím_{R\to\infty}\alpha e^{-tR^2+t\alpha^2} \to 0.$$

De forma similar se obtiene para

$$Lím_{R\to\infty}|I_2| \to 0,$$

por lo tanto

$$\int_{-R}^{R} e^{-tz^2}dz = \int_{-R+i\alpha}^{R+i\alpha} e^{-tz^2}dz \qquad (10).$$

Considerando que $R \to \infty$, se puede calcular la integral (10) haciendo un nuevo cambio de variable de la siguiente manera

$$z\sqrt{t} = q$$
$$dz = \frac{dq}{\sqrt{t}}$$

para llevarla a la integral de Poisson, que puede ser calculada fácilmente

$$\int_{-R+i\alpha}^{R+i\alpha} e^{-tz^2}dz = \frac{1}{\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-q^2 dq}$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{t}}.$$

Por lo que se puede finalmente expresar el resultado dado por (9) como sigue

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y) dy e^{-\frac{(x-y)^2}{4t^2}}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t) u_0(y)\, dy, \qquad (11)$$

Donde

$$G(x-y,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{\frac{-(x-y)^2}{4t^2}}.$$

Ahora, al regresar al problema (1)

$$\begin{cases} u_t = u_x \,, x > 0,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \quad x > 0 \\ u(0,t) = 0, t > 0 \end{cases}$$

e introducir una función auxiliar $\tilde{u}_o(x)$ definida en toda la recta, es decir $-\infty < x < \infty$ y mediante la extensión de la función $u_0(x)$ como una función impar, es decir

$$\tilde{u}_o(x) = \begin{cases} u_0(x) & x > 0 \\ -u_0(-x) & x < 0 \end{cases} \qquad (12)$$

Por lo que puede considerarse el siguiente problema

$$\begin{cases} u_t = u_x \,,\ x > 0,\ t > 0 \\ u(x,0) = \tilde{u}_0(x) \quad x \in \Re \\ u(0,t) = 0,\ t > 0. \end{cases}$$

Este problema tiene solución dado por (11) en la siguiente forma

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t) \tilde{u}_0(y)\, dy, \qquad (13)$$

donde

$$G(x-y,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t^2}}. \qquad (14)$$

Separando la solución para (13) en dos partes por la definición (12) se tiene

$$u(x,t) = \int_0^{\infty} G(x-y,t) u_0(y)\, dy + \int_0^{\infty} G(dy,\ v,t)\big(-u_0(-y)\big) dy.$$

Haciendo el siguiente cambio de variable en la segunda integral

$$-y = z$$
$$-dy = dz,$$

usando la definición de la función de Green (14) y cambiando el orden de los límites de integración se obtiene

$$u(x,t) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t^2}} u_0(y) dy$$
$$-\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x+z)^2}{4t^2}} u_0(z) dz$$

Como ahora z es la variable de integración de la segunda integral, puede considerarse una nueva variable de integración y, por lo que se pueden agrupar las dos integrales en la siguiente forma:

$$u(x,t) = \int_0^{\infty} u_0(y) dy \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{4t^2}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{4t^2}} \right).$$

Finalmente se expresa la solución en términos de una nueva función de Green para la semirrecta

$$u(x,t) = \int_0^{\infty} \tilde{G}(x-y,t) u_0(y) dy,$$

donde

$$\widetilde{G}(x-y,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\left(e^{-\frac{(x-y)^2}{4t^2}}-e^{-\frac{(x+y)^2}{4t^2}}\right).$$

La función $\widetilde{G}(x-y,t)$ se conoce como la solución fundamental de la ecuación de calor en la semirrecta, ya que puede demostrarse que

$$\widetilde{G}(x-y,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\left(e^{-\frac{(x-y)^2}{4t^2}}-e^{-\frac{(x+y)^2}{4t^2}}\right),$$

es la temperatura en el punto x en un tiempo t. También puede verificarse que la función de $\widetilde{G}(x-y,t)$ satisface la ecuación de calor, es decir

$$\widetilde{G}_t\,(x-y,t)=\widetilde{G}_{\boldsymbol{x}}\ (x-y,t).$$

Conclusiones

Se obtuvo una fórmula cerrada que define el comportamiento del modelo que describe una varilla en la que se transmite calor representada en la siguiente ecuación:

$$u(x,t)=\int_0^\infty G(x-y,t)u_0(y)dy$$

donde

$$G(x-y,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\left(e^{-\frac{(x-y)^2}{4t^2}}-e^{-\frac{(x+y)^2}{4t^2}}\right).$$

La solución a que se llega en este trabajo de investigación usando la transformada de Fourier, corresponde a los mismos resultados que se obtuvieron en los trabajos de Ablowitz (1997), Sveshnikov (1971) y Tijonov (1980), donde fueron usados métodos más complejos.

Bibliografía

ABLOWITZ, MARK J., S. FOKAS, ATHANASSIOS.
1997 Complex variables, Introduction and Applications. Cambridge University Press, 514-538 Pp.

SVESHNIKOV, A. G., TIKHONOV, A. N.
1971 The Theory of Functions of a Complex Variable. MIR. Moscu, 51-56, 216-240 Pp.

TIJONOV, A. N., SAMARSKY, A.
1980 Ecuaciones de la física matemática, Mir. Moscu, 229-250 Pp.